Eckpunkte zu einem genetischen, anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems

Antworten auf die Frage nach der ontologischen Bindung

Heinz Griesel

Für die Widmung der Arbeit „*Die ontologische Bindung spezieller Größen*" zu meinem 80. Geburtstag möchte ich mich bei den Autoren, den Kollegen Burscheid und Struve, sehr herzlich bedanken und gleichzeitig mit Respekt herausstellen, dass die Auffassung der in der Schule zu lehrenden *Elementarmathematik als empirische Theorie* auf Burscheid und Struve zurückgeht.

Die ontologische Bindung der Größen

Wenn eine Elementarmathematik auf der Basis des Größenbegriffs, wie ich sie vertrete, als empirische Theorie angesehen werden soll, dann stellen Burscheid und Struve zurecht die Frage, in welcher Weise diese Theorie, insbesondere auch der *anwendungsorientierte Aufbau des Zahlensystems* als Bestandteil dieser Theorie, ontologisch an die Wirklichkeit angebunden ist. Die Antwort lautet:
Die Größen des täglichen Lebens *Anzahl*, *Länge*, *Flächeninhalt*, *Volumen*, *Masse* und *Zeitdauer* sowie *Geld* sind dadurch an die Wirklichkeit ontologisch angebunden, dass sich die *Träger dieser Größen* aktiv und erfolgreich in Sachen und Sachverhalte der Lebenswirklichkeit hineininterpretieren lassen und dass die Träger dann als in die Wirklichkeit *eingebettet* aufgefasst werden können. Sie *haben* dann *Teil an der Wirklichkeit*.
Das sei kurz näher ausgeführt:
Die Größe *Anzahl* hat *nichtleere endliche Mengen* als Träger. Diese lassen sich mühelos z. B. in Ansammlungen von Gegenständen oder Lebewesen hineininterpretieren.
Die Größe *Länge* hat *Strecken* als Träger. Diese lassen sich z. B. als Kanten oder Mittellinien von Stäben oder Körpern auffassen.
Die Größe *Flächeninhalt* hat *Polygone* als Träger. Diese lassen sich z. B. als Rechtecke in Äcker, Grundstücke, Zimmerflächen, Wandflächen usw. hineininterpretieren.
Die Größen *Volumen* und *Masse* haben *Körper* als Träger, die z. B. als Gegenstände der Umwelt aufgefasst werden können.
Die Größe *Zeitdauer* hat *Vorgänge* als Träger, die in Abläufe der Wirklichkeit hineingesehen werden können.
Die Größe *Geld* hat *Mengen von Geldstücken oder -scheinen* als Träger, die als Bestandteile der Wirtschaftswirklichkeit aufgefasst werden können.

Äquivalenzrelation und Werteskala

Zwischen den Trägern einer Größe kann man eine Äquivalenzrelation $\sim$ einführen.
Diese Äquivalenzrelation ist die *Gleichmächtigkeit* für nichtleere endliche Mengen, die *Kongruenz* für Strecken, die *Zerlegungsgleichheit* für Polygone, die (letztlich empirisch überprüfbare) *Volumengleichheit* für Körper, die an einer Balkenwaage feststellbare *Massegleichheit* für Körper und die mithilfe reproduzierbarer periodischer Vorgänge feststellbare *Zeitdauergleichheit* von Vorgängen.
Für jede dieser Größen lässt sich dann eine Werteskala w mit Werten in der Wertemenge W einführen. Eine solche Werteskala ordnet jedem Träger τ einen Wert zu, und zwar so, dass gilt: $w(\tau) = w(\tau') \Leftrightarrow \tau \sim \tau'$ für alle Träger τ, τ' der Größe.
Ein Beispiel für eine solche Werteskala ist: Jedem Träger τ wird die Äquivalenzklasse, in der τ liegt, zugeordnet, also: $w(\tau) = \{\tau'; \tau \sim \tau'\}$

Präzisierung des Begriffs Größe; Zahlen als Vergleichsergebnisse des Messens

Definition. Eine Skala heißt Größe, falls in der Wertemenge W der Skala eine Verknüpfung / mit Werten in der Menge IR der von Null verschiedenen reellen Zahlen eingeführt ist, so dass gilt:*

(1) $(x/y)\cdot(y/z) = x/z$ *für alle* $x, y, z \in W$
(2) *Wenn* $x/y = 1$, *dann* $x = y$ *für alle* $x, y \in W$

Der Quotient / heißt *Messquotient*. In $x/y = \mu$ wird x mit y *gemessen*. Das Ergebnis ist die Zahl μ. In Bedingung (1) werden die Messungen x/y und y/z miteinander zur Messung x/z *verkettet*. Die Ergebnisse *multiplizieren* sich. Die obige Definition stellt den Zusammenhang der Begriffe *Größe*, *Größenwert*, *Zahl*, *Messung*, *Verkettung von Messungen*, *Multiplikation* klar.
Messen ist multiplikatives Vergleichen von Werten einer Skala. Zahlen sind nach dieser Auffassung universal einsetzbare Instrumente zur Angabe der *Vergleichsergebnisse des Messens*. Sie sind vom Menschen erfundene gedankliche Konstrukte, mit deren Hilfe die Werte einer Skala multiplikativ verglichen werden können.
Die obige Definition des Begriffs *Größe* und die anschließenden Überlegungen bilden den Orientierungsrahmen für die folgenden Gedankengänge dieser Arbeit. Keineswegs darf auf diese Definition aufgebaut werden. Das ist schon deswegen unmöglich, weil in der Definition die reellen Zahlen als bekannt vorausgesetzt werden, während doch gerade in einem genetischen Prozess diese Zahlen erst eingeführt werden sollen. Die Definition dient nur als Hilfe und Motivation.
Im Folgenden seien x, y, z, w sowie e (eventuell mit Indizes oder Strichen versehen) Variable für Größenwerte.

Ontologische Bindung einer Messung; genetischer Aufbau des Zahlensystems

Wichtig ist die These:
Eine Messung x/y ist genau dann *ontologisch an die Wirklichkeit gebunden*, falls x/y mit Hilfe der in die Wirklichkeit eingebetteten Träger von x und y definiert ist.
Bei einem genetischen, anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems, wie er im Schulunterricht üblich ist, werden der Reihe nach Zahlenarten, nämlich *natürliche Zahlen*, *Bruchzahlen (= positive rationale Zahlen)*, *rationale Zahlen*, *reelle Zahlen* erfunden und der Messquotient x/y jeweils mit Hilfe der Träger der oben besprochenen Größen erklärt.
Ist x/y eine natürliche Zahl, so ist x/y nur eine *partielle* Verknüpfung, d. h. nicht für alle x, y der betreffenden Größe definiert. Deswegen erfand man die rationalen Zahlen. Doch auch da bleibt x/y eine partielle Verknüpfung. Ist z. B. $x =$ Länge der Diagonale eines Quadrates und $y =$ Länge einer Seite dieses Quadrates, so ist bekanntlich x/y keine rationale Zahl. Es mussten die reellen Zahlen erfunden werden, um x/y zu einer vollständigen Verknüpfung zu machen.
Im Folgenden soll der genetische Aufbau des Zahlensystems in einigen Grundzügen verfolgt und dabei vor allem die ontologische Bindung der Messung verfolgt werden.

Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen wurden für den einfachsten Fall des Messens erfunden, nämlich für den Fall, dass die Träger äquivalent sind. Die exakte Definition lautet:

Definition. $x/y = n \Leftrightarrow$ *Es gibt Träger* $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ *mit* $y = w(\tau_1) = w(\tau_2) = \ldots = w(\tau_n)$ *und* $x = w(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n)$.

n sei dabei eine von null verschiedene natürliche Zahl. Die äquivalenten Träger $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ werden durch Auszählen bestimmt.
Die Verknüpfung $\tau_1 \circ \tau_2$ zwischen Trägern τ_1 und τ_2 wird schon lange in der *Repräsentationstheorie des Messens* verwendet und dort concatenate (zuammenfügen) genannt.
$\circ$ bedeutet bei der Größe *Anzahl* die mengentheoretische Vereinigung disjunkter Mengen. Bei der Größe *Zeitdauer* ist $\circ$ das Hintereinanderschalten von Trägern (in diesem Falle von Vorgängen) zu einem Gesamtvorgang.
Bei den anderen Größen stelle man sich im Zusammenhang mit $\circ$ das Zusammenfügen der Träger zu eine neuen Träger vor.
Da die Träger in die Realität eingebettet sind, ist auch das Zusammenfügen $\circ$ in die Realität eingebettet und damit ontologisch gebunden. Später werden wir sehen, dass das Zusammenfügen auch die Grundlage für die ontologische Bindung der Addition ist.
Statt $x/y = n$ schreiben wir im Folgenden auch: $x = n \cdot y$.

Bruchzahlen

Wir führen zunächst eine Äquivalenzrelation $\sim$ zwischen Paaren natürlicher Zahlen ein:

$$\begin{aligned}&(n, m) \sim (p, q)\\ &\quad \Leftrightarrow \forall x, y(\exists z(x = n\cdot z \text{ und } y = m\cdot z)\\ &\qquad \Leftrightarrow \exists z'(x = p\cdot z' \text{ und } y = q\cdot z'))\end{aligned}$$

Diese Äquivalenzrelation ist letztlich mit Hilfe der Träger der Größen definiert, denn $x = n\cdot z$, $y = m \cdot z$, $x = p \cdot z'$ und $y = q \cdot z'$ sind im Abschnitt *Natürliche Zahlen* mit Hilfe von Trägern definiert worden. $\sim$ ist also ontologisch gebunden.

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ ist dann diejenige Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation, in der das Zahlenpaar (m, n) liegt. Es gilt dann:

Definition. $x/y = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \exists z(x = m \cdot z \text{ und } y = n \cdot z)$

Beispiel: $x/y = \frac{2}{3}$, y = Flächeninhalt eines Kreises, z = Flächeninhalt eines Kreisdrittels, x = Flächeninhalt der Zusammenfügung zweier Kreisdrittel
Dann lässt sich die *Regel über das Erweitern und Kürzen* beweisen:

Satz. $\frac{m \cdot p}{n \cdot p} = \frac{m}{n}$ *für* $m, n, p \in IN*$

Beweis.

$$\begin{aligned} x/y = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} &\Leftrightarrow \exists z(x = m \cdot p \cdot z \text{ und } y = n \cdot p \cdot z) \\ &\qquad \text{Sei } z' = p \cdot z \\ &\Leftrightarrow \exists z'(x = m \cdot z' \text{ und } y = n \cdot z') \\ &\Leftrightarrow x/y = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Für den Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen gilt:

Satz. $\frac{m}{1} = m$ *für alle* $m \in IN*$

Beweis.

$$\begin{aligned} x/y = \frac{m}{1} &\Leftrightarrow \exists z(x = m \cdot z \text{ und } y = 1 \cdot z) \\ &\Leftrightarrow x = m \cdot y) \\ &\Leftrightarrow x/y = m \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Multiplikation

Nach Bedingung (1) der Definition des Begriffs *Größe* besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Multiplikation und dem Verketten von Messungen.
Die Multiplikation von Zahlen ist über das Verketten von Messungen ontologisch an die Wirklichkeit gebunden.
Dann muss in einem anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems die Multiplikation aber auch mit Hilfe des Verkettens von Messungen eingeführt werden.
Das *Verketten von Messungen ist auch die einheitliche, für alle Zahlenarten gültige* Grundvorstellung, *welche der Schüler mit der Multiplikation verbinden sollte.* Für die einzelnen Zahlenarten kann diese dann noch im einzelnen spezifiziert werden.

Aus Platzgründen überspringen wir die Betrachtung der Multiplikation für natürliche Zahlen. Sie würde zu dem Ergebnis führen, dass dabei gleichmächtige Mengen eine Rolle spielen (vgl. Griesel 1971, S. 186 ff). Wir betrachten die Definition der Multiplikation von Bruchzahlen und die Herleitung der Bruchrechenregeln für die Multiplikation:

Definition. Wenn $x/y = \frac{m}{n}$ *und* $y/z = \frac{p}{q}$, *dann sei* $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = x/z$.

Da das Verketten von Messungen trivialerweise assoziativ ist, folgt, dass auch die Multiplikation von Bruchzahlen assoziativ ist.
Dann lassen sich die Regeln über die Multiplikation von Bruchzahlen beweisen:

Satz 1. $\frac{m}{k} \cdot \frac{k}{n} = \frac{m}{n}$

Beweis.

$$\begin{aligned} x/y = \frac{m}{k} &\Leftrightarrow \exists w(x = m \cdot w \text{ und } y = k \cdot w) \\ y/z = \frac{k}{n} &\Leftrightarrow \exists w(y = k \cdot w \text{ und } z = n \cdot w) \\ \text{Daraus folgt:} &\quad \exists w(x = m \cdot w \text{ und } z = n \cdot w) \\ \text{Sowie:} &\quad x/z = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 2. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$

Beweis. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} \cdot \frac{n \cdot p}{n \cdot q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$
(Satz 1 wurde angewandt)

Aus Satz 1 und Satz 2 folgt, dass die Definition der Multiplikation über das Verketten von Messungen unabhängig von der Wahl der Messungen ist.
Aus Satz 2 folgt auch, dass die Multiplikation von Bruchzahlen kommutativ ist, da im Zähler und Nenner das Kommutativgesetz für natürliche Zahlen angewendet werden kann.
Das kann allerdings auch aus der *Ähnlichkeitsinvarianz* der Messquotienten gefolgert werden.

Die Ähnlichkeitsinvarianz von Messungen und deren Konsequenzen

Eine wichtige Eigenschaft von Messungen in Geometrie und Physik ist die sog. Ähnlichkeitsinvarianz. Was ist das?
Betrachten wir dazu ein Polygon und darin zwei Strecken τ_1 und τ_2. Das Verhältnis $w(\tau_1)/w(\tau_2)$ der Längen $w(\tau_1)$ und $w(\tau_2)$ ist dann ein Messquotient. Wird nun das Po-

lygon ähnlich vergrößert, so gehen die Strecken τ_1 und τ_2 in die Strecken τ_1' bzw. τ_2' über. Das Verhältnis der Streckenlängen bleibt jedoch gleich, d. h. es gilt: $w(\tau_1)/w(\tau_2) = w(\tau_1')/w(\tau_2')$.
Diese *Ähnlichkeitsinvarianz von Messungen* ist Voraussetzung für die Brauchbarkeit von Bauzeichnungen und Landkarten.
Auch die Ähnlichkeit kann mit Hilfe von Messquotienten ausgedrückt werden, im obigen Beispiel durch: $w(\tau_1)/w(\tau_1') = w(\tau_2)/w(\tau_2')$.

Definition. Die Messungen x/y und x'/y' sind ähnlichkeitsinvariant, falls gilt:
$x/x' = y/y' \Leftrightarrow x/y = x'/y'$.

Die Bedingung für die Ähnlichkeitsinvarianz kann man sich formal leicht merken: Die Innenglieder x' und y dürfen vertauscht werden.
Die Voraussetzung der Ähnlichkeitsinvarianz der Messungen hat einschneidende Konsequenzen. Es gilt:

Satz. Wenn Messungen ähnlichkeitsinvariant sind, dann gilt:
(1) *Die Verkettung ergebnisgleicher Messungen ist ergebnisgleich, d. h. es gilt: Wenn $x/y = x'/y'$ und $y/z = y'/z'$, dann $x/z = x'/z'$.*
(2) *Die mit Hilfe der Verkettung von Messungen definierte Multiplikation ist kommutativ.*

Eine wichtige Folgerung aus Behauptung (1) ist, dass die Definition der Multiplikation mit Hilfe der Verkettung von Messungen unabhängig von den verwendeten Messungen ist.

Beweis. Zu (1):
Sei $x/y = x'/y'$ und $y/z = y'/z'$, dann folgt wegen der Ähnlichkeitsinvarianz der Messungen: $x/x' = y/y'$ und $y/y' = z/z'$. Daraus folgt: $x/x' = z/z'$ Wegen der Ähnlichkeitsinvarianz der Messungen folgt: $x/z = x'/z'$
Zu (2):
Sei $x/y = \lambda$ und $y/z = \mu$, dann ist $\lambda \cdot \mu = x/z$. Sei $y'/z = \lambda$, dann folgt: $x/y = y'/z$.
Wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeitsinvarianz der Messungen folgt: $x/y' = y/z = \mu$.
Also folgt: $x/z = (x/y') \cdot (y'/z) = \mu \cdot \lambda$. Also gilt: $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$.

Auch die Umkehrungen der Behauptungen (1) und (2) des obigen Satzes sind gültig.

Addition

Im Gegensatz zur Multiplikation ist die Addition $+$ von Zahlen nicht unmittelbar ontologisch an die Wirklichkeit gebunden, wohl die Addition $\oplus$ von Größenwerten. Diese ist mit Hilfe des Zusammenfügens $\circ$ erklärt:

Definition. Ist $x = w(\tau)$ und $y = w(\tau')$, dann sei $x \oplus y = w(\tau \circ \tau')$.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Träger τ und τ'. Man mache sich nämlich an den Trägern der obigen Größen klar: Die Zusammenfügung äquivalente Träger ist wieder äquivalent.
Damit keine Missverständnisse aufkommen, werden die Addition $+$ von Zahlen und die Addition $\oplus$ von Größenwerten mit verschiedenen Symbolen bezeichnet.
Die Addition von Zahlen wird auf die Addition von Größenwerten zurückgeführt:

Definition. Wenn $z = x \oplus y$ und $x/e = \mu_1, y/e = \mu_2, z/e = \mu_3$, dann sei $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Größenwerte x, y, z, e.
Kurzformulierung: Wenn $\mu_1 e \oplus \mu_2 e = \mu_3 e$, dann: $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$.
Die einheitliche *Grundvorstellung* der Addition ist also das Zusammenfügen von Trägern.
Diese obige Definition der Addition gilt auch z. B. für Bruchzahlen.
Dann kann man die *Regel über die Addition gleichnamiger Brüche* herleiten.

Satz. $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$ *für alle* $m, n, p \in IN*$

Beweis. $\frac{m}{n} \cdot e \oplus \frac{p}{n} \cdot e = m \cdot \frac{1}{n} e \oplus p \cdot \frac{1}{n} e = \frac{m+p}{n} e$.
Daraus folgt die Behauptung.

Eine Größe, in welcher die Addition $\oplus$ von Größenwerten mit Hilfe des Zusammenfügens $\circ$ der Träger eingeführt ist, heißt auch *extensiv bezüglich* $\circ$.

Negative Zahlen

Für die Einführung der negativen Zahlen ist folgender Satz von Bedeutung:

Satz. Eine Größe, deren Messquotient seine Werte in der Menge IR annimmt, ist Produktgröße einer Größe, deren Messquotient seine Werte in der Menge IR^+ annimmt und der zweiwertigen Richtungsgröße, deren Messquotient seine Werte in der Menge $\{+1, -1\}$ annimmt.*

Man beachte auch, dass die Gruppe $(IR*, \cdot)$ das direkte Produkt der Gruppen $(IR^+, \cdot)$ und $(\{+1, -1\}, \cdot)$ ist. Letztere ist die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

Zur Einführung der negativen Zahlen eignet sich z. B. die Größe *der Veränderungen der Werte einer vorgegebenen Größe G* (z. B. Veränderungen von Kontoständen oder von Flughöhen).
Diese Größe ist *extensiv* mit dem Hintereinanderschalten $\circ$ der Veränderungen als Zusammenfügen (concatenate). Bei den Veränderungen kann man den Betrag der Veränderung und die Richtung (Zunahme oder Abnahme) unterscheiden. Diese Veränderungen müssen multiplikativ verglichen werden. (Das ist ja Messen.) Man muss dann bei dem Vergleich die Richtung der Veränderungen vergleichen und die Beträge. Beim Vergleich der Richtungen führt man dann -1 als Wert des Messquotienten ein, falls die Richtungen verschieden sind (wobei -1 als das vom neutralen Element 1 verschiedene Element der zyklischen Gruppe der Ordnung 2 aufgefasst werden kann).
Die Einführung der Addition erfolgt dann über das Hintereinanderschalten (Zusammenfügen) $\circ$ von Veränderungen.
Wie beweist man in diesem Zusammenhang die Vorzeichenregeln der Multiplikation?
Dabei muss beachtet werden, dass die Multiplikation mit Hilfe der Verkettung von Messungen zu definieren ist.
Der Beweis der Vorzeichenregeln ergibt sich aus der folgenden Tabelle:
r und r' seien die beiden Werte der Richtungsgröße. Diese Werte können die Variablen x,y,z annehmen. Das sind insgesamt 8 Möglichkeiten, die in den Spalten 1, 2 und 3 notiert sind.
In die Spalten 4. 5 und 6 sind dann die Werte der jeweiligen Messquotienten eingetragen.

x	y	z	x/y	y/z	x/z
r	r	r	$+1$	$+1$	$+1$
r	r	r'	$+1$	-1	-1
r	r'	r	-1	-1	$+1$
r	r'	r'	-1	$+1$	-1
r'	r	r	-1	$+1$	-1
r'	r	r'	-1	-1	$+1$
r'	r'	r	$+1$	-1	-1
r'	r'	r'	$+1$	$+1$	$+1$

Die Zahl in der letzten Spalte ist laut Definition der Multiplikation das Produkt der Zahlen der 4. und 5. Spalte.
Man liest die Vorzeichenregeln der Multiplikation ab, z. B. in Zeile 3: $(-1) \cdot (-1) = +1$. Das ist keine Überraschung, denn die Vorzeichenregeln gelten schon in der Gruppe $(\{+1, -1\}, \cdot)$.
Dadurch, dass alle 8 Möglichkeiten der Verteilung der Werte r und r' auf die Variablen x,y und z durchgespielt werden, wird durch die Tabelle auch die Unabhängigkeit der Definition der Multiplikation von der Wahl der Werte nachgewiesen.

Reelle Zahlen

Die positiven reellen Zahlen kann man folgendermaßen einführen:
Der Messquotient x/y wird als irrational bezeichnet, falls es kein $m, n \in IN*$ gibt mit $\exists z(m \cdot z = x$ und $n \cdot z = y)$.
Die folgende Menge definiert dann eine reelle Zahl, die dem Messquotienten x/y als Vergleichsergebnis zugeordnet wird: $x/y = \{\frac{m}{n}; m, n \in IN*$ und $\exists z(m \cdot z \leq x$ und $n \cdot z = y)\}$.
Eine solche Menge kann auch durch einen unendlichen Dezimalbruch beschrieben werden. Auf Einzelheiten wird hier nicht eingegangen.

Rückblick

Die Einführung der neuen Zahlen und deren Verknüpfungen Multiplikation und Addition erfolgte in enger Anbindung an die Wirklichkeit. Man hätte diese Verknüpfungen auch losgelöst von der Wirklichkeit, die Addition von natürlichen Zahlen z. B. durch Weiterzählen einführen können. Das widerspricht jedoch dem Prinzip vom modellierenden Herauslösen aus Umweltbezügen.
Dieses didaktische Prinzip lautet:
Prinzip vom modellierenden Herauslösen aus Umweltbezügen: Für das gelenkte Lernen von Mathematik ist es günstig, wenn die vom Schüler aufzubauenden Begriffe von ihm selbst durch aktive Auseinandersetzung mit Umweltbezügen im Zusammenhang mit einem konstruktiven Hineininterpretieren in die Umwelt gebildet werden.
Es handelt sich um eine Weiterentwicklung eines Prinzips, das ursprünglich auf W. Oehl zurückgeht (vgl. Griesel 1976, insbesondere auch S. 68).
Die Arbeit hat nur wenige Eckpunkte für einen anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems behandelt. Vieles musste aus Platzgründen unerwähnt bleiben. Nicht besprochen wurde insbesondere die Bedeutung der Existenz der 4. Proportionale in einer Proportion.

Beziehung zum Strukturalismus

Bei den Überlegungen dieser Arbeit wurde kein Bezug auf die Begrifflichkeit des wissenschaftstheoretischen Strukturalismus von Sneed, Stegmüller, Balzer, Moulinez genommen. Insbesondere wurde nicht untersucht, ob ein jeweils eingeführter Begriff in Bezug auf die Theorie *theoretisch* oder *nicht-theoretisch* ist. Auch wurde nicht von den *intendierten Anwendungen* gesprochen. Man sollte sich ohnehin fragen, ob diese Begrifflichkeit in diesem Zusammenhang zusätzliche Einsichten liefert und ob sie überhaupt ein in allen Belangen geeignetes Hilfsmittel darstellt, um das Problem der ontologischen Bindung zu bearbeiten. Doch stehe ich allen Überlegungen, die diese Begrifflichkeit verwenden, aufgeschlossen gegenüber.

Literatur

Burscheid H. J., Struve H., 2009: Mathematikdidaktik in Rekonstuktionen. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Burscheid H. J., Struve H., 2011: Die ontologische Bindung spezieller Größen. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, dieses Heft 91.

Griesel H., 1971: Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Band 1 (2. Auflage), Schroedel Verlag, Hannover

Griesel H., 1976: Das Prinzip von der Herauslösung eines Begriffs aus Umweltbezügen. In: Winter H., Wittmann E. (Hrsg.) Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Schroedel Verlag, Hannover, S. 61–71

Griesel H., 1996 a: Proportionalität als Relation zwischen Größen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht S. 146–149, Verlag Franzbecker, Hildesheim

Griesel H., 1996 b: Grundvorstellungen zu Größen. In: Mathematik lehren, Heft Oktober S. 15–19, Verlag Friedrich Velber

Griesel H., 1997: Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. Journal für Mathematikdidaktik 18, 259–284

Griesel H., 1998: Messen als zentrale Idee. In: Beiträge zum Mathematikunterricht S. 236–238, Verlag Franzbecker, Hildesheim

Griesel H., 2003: Messen und Aufbau des Zahlensystems. In: Hefendehl-Hebecker L., Hußmann St. (Hrsg.) Mathematik zwischen Fachorientierung und Empirie, Festschrift für Norbert Knoche, S. 53–64, Verlag Franzbecker, Hildesheim

Griesel H., 2005: Modelle und Modellieren. In: Henn H.-W., Kaiser G. (Hrsg.) Mathematik im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation, Festschrift für Werner Blum, Verlag Franzbecker, Hildesheim

Griesel H., 2006: Quantitative Messsyteme; ein Beitrag zu den Grundsatzfragen: Was ist quantitatives Messen? Wie hängen einerseits Messen und andererseits die Zahlen und deren Rechenoperationen zusammen? NATG im DIN, NA 152-01-56 AA N45, 11 Seiten

Griesel H., 2007: Reform of the Construction of the Number System with Reference to Gottlob Frege. In: Mathematics Education, ZDM, Vol 39, 1–2, March, S. 31–38, Springer Verlag, Heidelberg